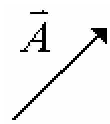
Chapitre 2.1 – Les vecteurs

Le vecteur

Le vecteur représente un **module** (**grandeur**) avec une **orientation**. On utilise la flèche pour le représenter graphiquement. Pour identifier une variable comme étant vectorielle, il suffit de mettre une « petite flèche » au-dessus de la variable :

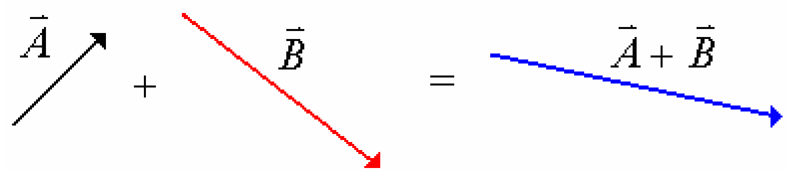
Pointe de la flèche : **Orientation**

Longueur de la flèche: **Module (Grandeur)**

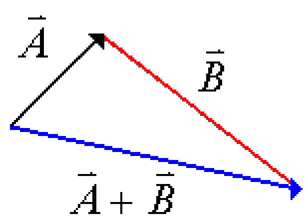


Addition graphique d'un vecteur

Un vecteur supporte l'opération de l'addition. Graphiquement, il suffit de mettre bout à bout les flèches :

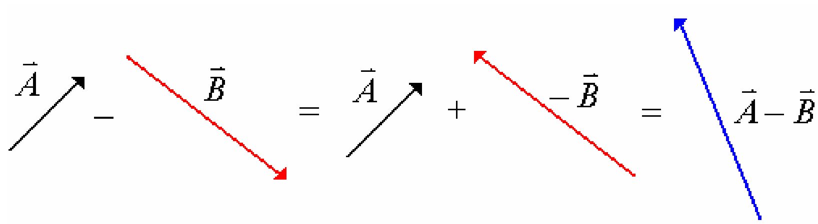


car :

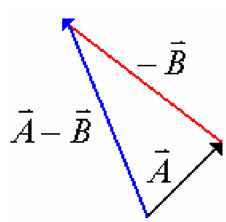


Soustraction graphique d'un vecteur

La soustraction est l'action d'inverser le sens d'un vecteur. Ainsi, la flèche point dans l'autre sens :



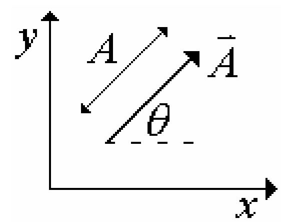
car :



Représentation mathématique d’un vecteur

Puisqu’un vecteur représente une grandeur physique avec une orientation, on peut représenter mathématiquement un vecteur à l’aide d’un couple **longueur** et **angle** :

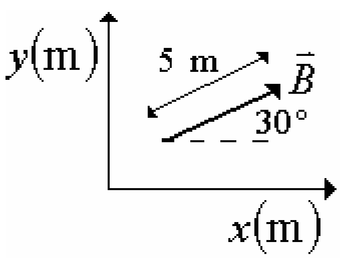
$$\vec{A} = \left(A, \theta\right)$$



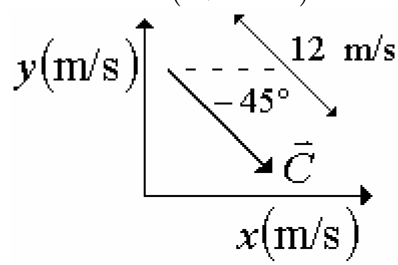
où $\vec{A}$: Le vecteur.
A : Le module du vecteur (la longueur).
θ : Angle que fait le vecteur par rapport à un système d’axe.

<u>Exemples :</u>

$\vec{B} = \left(5,\ 30°\right)$

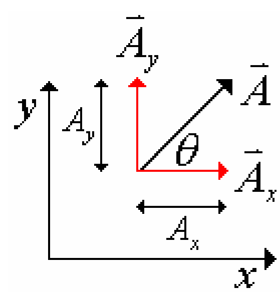


$\vec{C} = \left(12,\ -45°\right)$



La deuxième représentation mathématique d’un vecteur peut se faire à l’aide d’un couple **longueur** et **longueur** utilisant la définition de l’addition :

$$\vec{A} = \left(A_x\ , A_y\right) = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



où $\vec{A}$: Le vecteur.
A_x : Longueur du vecteur projetée sur l’axe *x*.
A_x : Longueur du vecteur projetée sur l’axe *y*.
$\vec{A}_x$: Vecteur parallèle à l’axe *x*.
$\vec{A}_y$: Vecteur parallèle à l’axe *y*.

On peut faire le lien entre les deux représentations grâce aux relations trigonométriques suivantes :

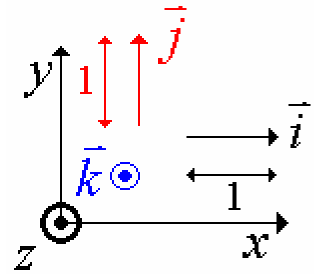
$$A_x = A\cos\left(\theta\right)$$

$$A_y = A\sin\left(\theta\right)$$

$$A = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2}$$

Vecteur unitaire

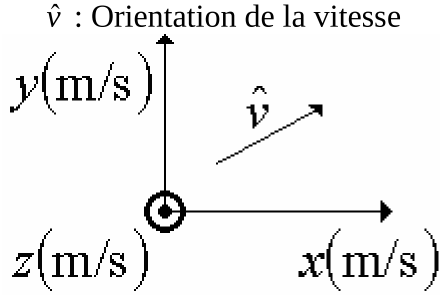
Le **<u>vecteur unitaire</u>** est un vecteur de **<u>longueur 1</u>** ayant une **<u>direction particulière</u>**. Certains sont **alignés** sur un **axe** du **système de coordonnée.** D'autres sont alignés dans une **direction** reliée à un **concept physique**. On utilise le « **chapeau** » (ex : $\hat{n}$) pour représenter un vecteur unitaire :



$\vec{i}$ ou $\hat{x}$: Vecteur unitaire aligné sur l'axe *x*.
$\vec{j}$ ou $\hat{y}$: Vecteur unitaire aligné sur l'axe *y*.
$\vec{k}$ ou $\hat{z}$: Vecteur unitaire aligné sur l'axe *z*.

Exemple vecteur unitaire pas aligné sur l'axe :

$\hat{v}$: Orientation de la vitesse



Module d'un vecteur

Le **module** d'un vecteur représente sa **longueur (grandeur)**. On peut l'évaluer à l'aide du théorème de pythagore :

<u>En deux dimensions :</u>

$$|\vec{A}| = |(A, \theta)| = |(A_x \ , A_y)| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2} = A$$

où $\vec{A}$: Le vecteur étudié. et $A_x = A\cos(\theta)$

$|\vec{A}|$, A : La norme de $\vec{A}$. $A_y = A\sin(\theta)$

$\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$: Théorème de pythagore en 2D $A = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2}$

<u>En trois dimensions :</u>

$$|\vec{A}| = |(A, \theta, \phi)| = |(A_x \ , A_y \ , A_z)| = \sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2} = A$$

où $\sqrt{A_x{}^2 + A_y{}^2 + A_z{}^2}$: Théorème de pythagore en 3D.

<u>Norme d'un vecteur unitaire :</u>

$$|\vec{i}| = 1 \quad |\vec{j}| = 1 \quad |\vec{k}| = 1 \quad |\hat{n}| = 1$$

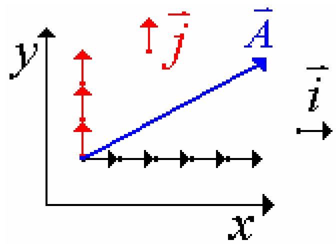
Représentation d'un vecteur en vecteur unitaire

À l'aide de la définition de l'addition graphique d'un vecteur, on peut décomposer un vecteur quelconque en vecteur unitaire de la façon suivante :

$$\vec{A} = \left(A_x \ , A_y \ , A_z\right) = A_x \ \vec{i} + A_y \ \vec{j} + A_z \ \vec{k}$$

<u>Exemple :</u>

$$\vec{A} = (5{,}3) = 5 \ \vec{i} + 3 \ \vec{j}$$



Addition algébrique d'un vecteur

Pour additionner des vecteurs algébriquement, il faut les représenter en vecteurs unitaires. Ainsi, tout comme l'addition graphique, on peut additionner les composantes x ensemble, les composantes y ensemble et les composantes z ensemble :

$$\vec{A} + \vec{B} = \sum_{i=1}^{N} \left(A_i + B_i\right) \ \hat{i}$$

où N : Nombre de dimensions au vecteur. (en : en 3D, $N = 3$)
i : Une dimension particulière du vecteur (ex : x, y)
$\hat{i}$: Vecteur unitaire aligné sur l'axe i (ex : $\vec{i}$ et x, $\hat{y}$ et y)

<u>Exemple en 2D :</u> $\vec{A} + \vec{B} = \left(A_x \ \vec{i} + A_y \ \vec{j}\right) + \left(B_x \ \vec{i} + B_y \ \vec{j}\right) = \left(A_x + B_x\right) \ \vec{i} + \left(A_y + B_y\right) \ \vec{j}$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Puisque la multiplication est une répétition d'additions semblables, on peut définir la multiplication d'un vecteur par un scalaire de la façon suivante :

$$\alpha \ \vec{A} = \sum_{i=1}^{N} \alpha \ A_i \ \hat{i}$$

où α : Multiplicateur scalaire au vecteur ($\alpha \in \Re$)

<u>Exemple en 2D :</u> $\alpha \ \vec{A} = \alpha\left(A_x \ \vec{i} + A_y \ \vec{j}\right) = \alpha A_x \ \vec{i} + \alpha A_y \ \vec{j}$

<u>Exemple en 3D :</u> $\alpha \ \vec{A} = \alpha\left(A_x \ \vec{i} + A_y \ \vec{j} + A_z \ \vec{k}\right) = \alpha A_x \ \vec{i} + \alpha A_y \ \vec{j} + \alpha A_z \ \vec{k}$

Exercices

Exercice A : ***Vecteurs graphiques et algébriques.*** Soit les deux vecteurs :

$$\vec{A} = (4,\ 30°) \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = (7,\ -60°)$$

a) Dessinez les deux vecteurs avec l'échelle suivante 1 cm = 1 unité.

b) Dessinez l'opération $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

c) Dessinez l'opération $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.

d) Exprimez mathématiquement les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ à l'aide des vecteurs unitaire $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

e) Exprimez mathématiquement l'opération $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

f) Exprimez mathématiquement l'opération $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$.

Exercice B : ***Vecteurs dans un plan cartésien.*** Pour positionner des objets dans un plan cartésien, on peut utiliser la notation vectorielle. Il est alors très important de connaître l'origine (0,0) du plan cartésien.

Considérons l'objet A à la coordonnée (4,5) et un l'objet B à la coordonnée (7,2) :

a) Dessinez les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ partant de l'origine permettant de positionner l'objet A et B par rapport à l'origine.

b) Évaluez mathématiquement les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Ceci représente le déplacement nécessaire en $\vec{i}$ et $\vec{j}$ pour passer de la coordonnée (0,0) à la coordonnée de l'objet A et B.

c) Dessinez le vecteur $\vec{C}$ représentant le déplacement nécessaire pour passer de l'objet A à l'objet B.

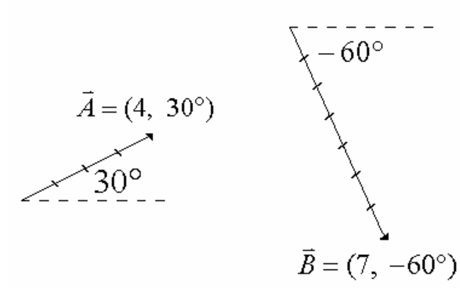
d) Évaluez mathématiquement le vecteur $\vec{C}$ à l'aide des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

e) Trouvez une opération mathématique qui permet de construire le vecteur $\vec{C}$ à partir des vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$. (Exemple : $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, $\vec{C} = 2\vec{A} + \vec{B}$)

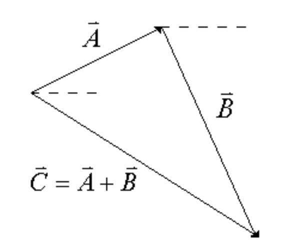
Solutions

Exercice A : ***Vecteurs graphiques et algébriques*.**

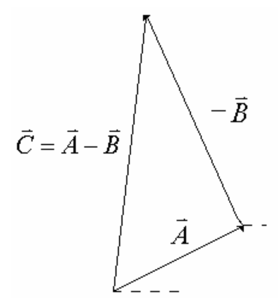
a) **P.S.** ces dessins ne sont pas à l'échelle, mais l'idée est bien représentée.



b)



c)



d)

$$\vec{A} = (4,\ 30°) = 4\ \cos(30°)\vec{i} + 4\ \sin(30°)\vec{j} = 3{,}46\ \vec{i} + 2\ \vec{j}$$

$$\vec{B} = (7,\ -60°) = 7\ \cos(-60°)\vec{i} + 4\ \sin(30°)\vec{j} = 3{,}5\ \vec{i} - 6{,}06\ \vec{j}$$

e)

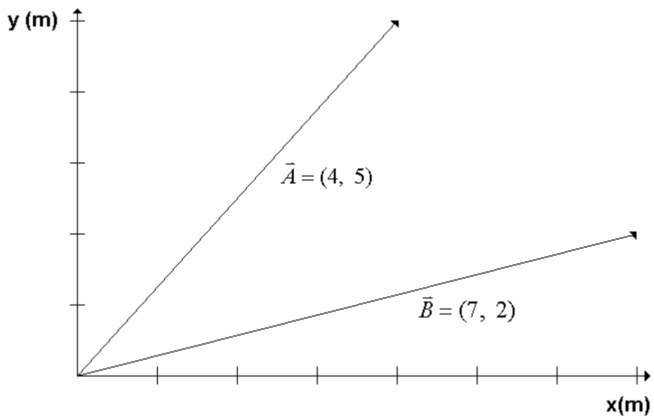
$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \left(3{,}46\ \vec{i} + 2\ \vec{j}\right) + \left(3{,}5\ \vec{i} - 6{,}06\ \vec{j}\right) = (3{,}46 + 3{,}5)\vec{i} + (2 - 6{,}06)\vec{j} = 6{,}96\ \vec{i} - 4{,}06\ \vec{j}$$

f)

$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \left(3{,}46\ \vec{i} + 2\ \vec{j}\right) - \left(3{,}5\ \vec{i} - 6{,}06\ \vec{j}\right) = (3{,}46 - 3{,}5)\vec{i} + (2 + 6{,}06)\vec{j} = -0{,}04\ \vec{i} - 8{,}06\ \vec{j}$$

Exercice B : ***Vecteurs dans un plan cartésien*****.**

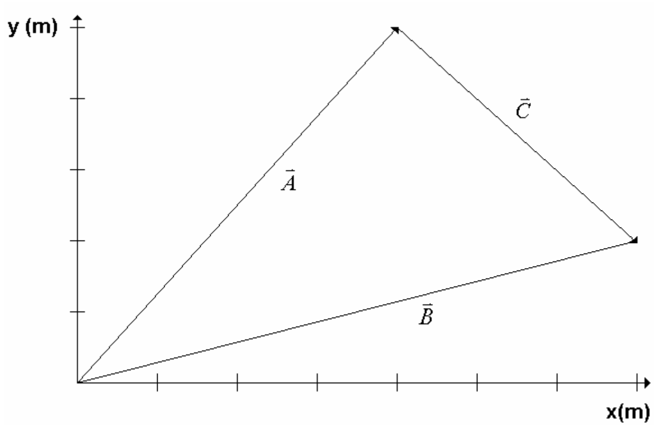
a)



b)

$\vec{A} = 4\ \vec{i} + 5\ \vec{j}$ $\qquad\qquad$ $\vec{B} = 7\ \vec{i} + 2\ \vec{j}$

c)



d)

$\vec{C} = 3\ \vec{i} - 3\ \vec{j}$

e)

$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ car $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} = \left(7\ \vec{i} + 2\ \vec{j}\right) - \left(4\ \vec{i} + 5\ \vec{j}\right) = 3\ \vec{i} - 3\ \vec{j}$